Intégrale de Dirichlet

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

Proposition. *L'intégrale de Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ *est semi-convergente et vaut* $\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Commençons par monter que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. Soit $N \in \mathbf{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+k\pi}\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

Montrons à présent que $\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ admet une limite lorsque $A \to +\infty$ et que celle-ci vaut $\frac{\pi}{2}$. Pour cela, posons f la fonction définie sur $[0,A]\times\mathbf{R}_+$ par $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)$. Montrons que f est intégrable. Par le théorème de Fubini–Tonelli :

$$\iint_{[0,A]\times\mathbf{R}_+} \mathrm{e}^{-xy}|\sin x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)|\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x < +\infty$$

La fonction f est intégrable, on peut donc appliquer le théorème de Fubini–Lebesgue :

$$(*) \quad \int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^A \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

On calcule alors $\int_0^A \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ en remarquant que $\mathrm{e}^{-xy}\sin(x) = \mathfrak{Im}\big(\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big) = \mathfrak{Im}\big(\mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-y)}\big)$.

$$\int_0^A \mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-y)}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{A(\mathrm{i}-y)}-1}{\mathrm{i}-y} = \frac{\big(\mathrm{e}^{A(\mathrm{i}-y)}-1\big)(\mathrm{i}+y)}{-1-y^2} = -\frac{\mathrm{e}^{-yA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+\frac{\pi}{2})} - \mathrm{i} + y\,\mathrm{e}^{-yA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} - y}{1+y^2}$$

Ainsi, en prenant la partie imaginaire :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-xy}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathfrak{Im}\left(\frac{y+\mathrm{i}-\mathrm{e}^{-yA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+\frac{\pi}{2})} - y\,\mathrm{e}^{-yA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}}{1+y^2}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-yA}\cos(A) - y\,\mathrm{e}^{-yA}\sin(A)}{1+y^2}$$

Donc, en injectant cette égalité dans $(*)$:

$$\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-yA}\cos(A) - y\,\mathrm{e}^{-yA}\sin(A)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-yA}\big(\cos(A)+y\sin(A)\big)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Il reste à montrer que cette dernière intégrale tend vers 0 lorsque A tend vers l'infini. Pour cela on va utiliser le théorème de convergence dominée. En effet si $A \geqslant 1$, on a la domination :

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-yA}\big(\cos(A)+y\sin(A)\big)}{1+y^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-y}(1+y)}{1+y^2}$$

Cette dernière fonction est bien intégrable sur $\mathbf{R}_+$, le théorème s'applique et on obtient le résultat souhaité :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

□

Référence

— CANDELPERGHER, *Calcul intégral*, pages 30 et 212 (les mots « intégrale de Dirichlet » n'apparaissent pas dans l'index).