Applications dont la différentielle est une isométrie

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

On notera $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Si $\ell \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, on notera $|||\ell||| = \sup_{\|x\|=1} \|\ell(x)\|$ la norme subordonnée.

Théorème. *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}f(x) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Alors f est une isométrie affine.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}f(x) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ donc $|||\mathrm{d}f(x)||| = 1$. Par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$$

Soit $a \in \mathbf{R}^n$. Comme $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on peut appliquer le théorème d'inversion locale : il existe U_a voisinage ouvert de a dans $\mathbf{R}^n$ et il existe V_a voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbf{R}^n$ tels que la restriction $f_{|U_a} : U_a \to V_a$ soit un difféomorphisme. Quitte à réduire U_a, on peut supposer que V_a est une boule ouverte, donc convexe. Notons $g : V_a \to U_a$ l'application réciproque. Alors la différentielle de g est donnée par :

$$\forall x \in U_a,\ \mathrm{d}g\big(f(x)\big) = \mathrm{d}f(x)^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$$

Ainsi pour tout $u \in V_a$, $|||\mathrm{d}g(u)||| = 1$ et par l'inégalité des accroissements finis (convexité de V_a) :

$$\forall u, v \in V_a,\ \|g(u) - g(v)\| \leqslant \|u - v\|$$

Donc pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$:

$$\|x - y\| = \big\|g\big(f(x)\big) - g\big(f(y)\big)\big\| \leqslant \|f(x) - f(y)\|$$

On a ainsi montré que pour tous $x, y \in U_a$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

Réécrivons cette dernière égalité avec le produit scalaire :

$$\forall x, y \in U_a,\ \big\langle f(x) - f(y) \,\big|\, f(x) - f(y)\big\rangle = \langle x - y \mid x - y\rangle$$

On différentie cette égalité en x :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n,\ 2\big\langle \mathrm{d}f(x).h \,\big|\, f(x) - f(y)\big\rangle = 2\langle h \mid x - y\rangle$$

On différentie alors cette égalité en y :

$$\forall h' \in \mathbf{R}^n,\ -4\big\langle \mathrm{d}f(x).h \,\big|\, \mathrm{d}f(y).h'\big\rangle = -4\langle h \mid h'\rangle$$

On a ainsi montré que pour tous $h, h' \in \mathbf{R}^n$, $\big\langle \mathrm{d}f(x).h \,\big|\, \mathrm{d}f(y).h'\big\rangle = \langle h \mid h'\rangle$. Alors pour tout $h \in \mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}f(x).h - \mathrm{d}f(y).h\|^2 &= \|\mathrm{d}f(x).h\|^2 - 2\big\langle \mathrm{d}f(x).h \,\big|\, \mathrm{d}f(y).h\big\rangle + \|\mathrm{d}f(y)\|^2\\ &= \|h\|^2 - 2\langle h \mid h\rangle + \|h\|^2\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc pour tous $x, y \in U_a$, $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(y)$.

Posons $E = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(0)\}$. D'après ce que précède, E est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. De plus, f est de classe C^1 donc l'application $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ est continue. Ainsi, E est un fermé de $\mathbf{R}^n$. Par connexité de $\mathbf{R}^n$, on conclut que $E = \mathbf{R}^n$. Posons $\ell(h) = \mathrm{d}f(0).h$; alors $f - \ell$ est différentiable de différentielle nulle sur $\mathbf{R}^n$. Par connexité, $f - \ell$ est constante sur $\mathbf{R}^n$. Notons c cette constante, alors pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $f(x) = \ell(x) + c$. □

Référence

— GOURDON, *Les maths en tête, analyse.*