Réduction de endomorphismes normaux sur un espace euclidien

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

Définition. Soit E un espace euclidien de dimension finie n. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme normal si u commute avec son adjoint.

Lemme. *Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal et si F est un s.e.v. stable par u, alors F et $F^\perp$ sont stables par u et par u^*.*

Démonstration. Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une b.o.n. de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une b.o.n. de $F^\perp$. Dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, la matrice M de u s'écrit par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Comme u est normal, u commute avec son adjoint. Matriciellement, cette relation s'écrit :

$$M\,{}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}MM \iff \begin{pmatrix} * & * \\ * & D\,{}^{\mathrm{t}}D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & {}^{\mathrm{t}}BB + {}^{\mathrm{t}}DD \end{pmatrix}$$

En particulier, on a $D\,{}^{\mathrm{t}}D = {}^{\mathrm{t}}BB + {}^{\mathrm{t}}DD$. En prenant la trace, on trouve $\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}BB) = 0$. Donc $B = 0$ et M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Ainsi, F et $F^\perp$ sont stables par u et par u^*. Enfin, ${}^{\mathrm{t}}AA = A\,{}^{\mathrm{t}}A$ et ${}^{\mathrm{t}}DD = D\,{}^{\mathrm{t}}D$ donc $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ sont normaux. □

Théorème. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle u s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \tau_r & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_s \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbf{R} \qquad \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$$

Démonstration. Par récurrence sur n.

— Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.

— Si $n = 2$, on considère une base orthonormée de E et on regarde $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base.

$$M\,{}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}MM \iff \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

De ces relations on déduit $b^2 = c^2$ et $ac + bd = ab + cd$, c'est-à-dire $(a-d)(b-c) = 0$.
Si $b = -c$ alors $a = d$ et la matrice M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si $b = c \neq 0$, alors $\chi_u(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$. En remarquant que $\chi_u(a) = -b^2 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires entraine l'existence d'une racine réelle de χ_u. Ainsi, u admet un vecteur propre. Posons F le s.e.v. engendré par ce vecteur. C'est un s.e.v. stable par u, donc d'après le lemme, F et $F^\perp$ sont stables par u et on se ramène au cas $n = 1$.

— Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons-le au rang $n \geqslant 3$. Il suffit de trouver F un s.e.v. de dimension 1 ou 2 stable par u.
Si u admet un vecteur propre, on prend le s.e.v. engendré par ce vecteur. Sinon, u n'a pas de valeurs propres réelles donc χ_u n'a pas de racines dans $\mathbf{R}$. Ce polynôme se factorise dans $\mathbf{R}[X]$:

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k) \qquad \beta_k^2 < 4\gamma_k$$

Par Cayley–Hamilton, $\chi_u(u) = 0$, donc l'un des $u^2 + \beta_k u + \gamma_k \mathrm{id}_E$ est non injectif[1]. Ainsi, il existe $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$ et il existe $x \neq 0$ tel que $u^2(x) + \beta u(x) + \gamma x = 0$. Posons alors $F = \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$. Comme x n'est pas vecteur propre de u, F est de dimension 2. De plus, F est stable par u.
D'après le lemme, $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ sont des endomorphismes normaux. On applique l'hypothèse de récurrence à $u_{|F^\perp}$ et on applique le cas $n = 1$ ou $n = 2$ à $u_{|F}$.

□

Référence

— Ramis, Deschamps et Odoux, *Cours de mathématiques spéciales tome 2 : algèbre et applications à la géométrie.*

1. s'ils étaient tous injectifs, alors ils seraient tous bijectifs donc leur produit serait bijectif, absurde.