Table de caractères de D_4 et de $\mathbf{H}_8$.

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

Théorème. *Les groupes* D_4 *et* $\mathbf{H}_8$ *ont la même table de caractères.*

Démonstration. Soit G un groupe non abélien d'ordre 8. Notons Z le centre de G, alors $|Z| \in \{1,2,4,8\}$. Comme G n'est pas abélien, G/Z ne peut pas être cyclique donc $|Z| \in \{1,2\}$. De plus, G est un 2–groupe, son centre n'est donc pas trivial. Donc $|Z| = 2$ et $G/Z \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Le groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ possède 4 représentations irréductibles, de degrés 1 et celles-ci sont déterminées par $(1,0) \mapsto \pm 1$ et $(0,1) \mapsto \pm 1$. Par passage au quotient $G \to G/Z \to \mathbf{C}^*$, on en déduit 4 représentations irréductibles de degrés 1 du groupe G. Comme la somme des degrés des représentations irréductibles de G vaut 8, il reste ou bien 4 autres représentations irréductibles de degrés 1, ou bien un représentation irréductible de degré 2. Le premier cas est exclu, sinon G serait abélien. Donc G possède 5 représentations irréductibles, quatre de degrés 1 et une de degré 2.

Notons $Z = \{e, z\}$ et a, b, c des représentants des classes non triviales de G modulo Z. Ainsi, on a $G/Z = \big\{\{e,z\},\{a,za\},\{b,zb\},\{c,zc\}\big\}$. Regardons les classes de conjugaison de G. Il y en a 5 : deux classes de cardinal 1 ($\{e\}$ et $\{z\}$), et trois autres classes. La projection canonique $G \to G/Z$ envoie surjectivement les classes de conjugaison de G sur les classes de conjugaison de G/Z (la classe de conjugaison de x est envoyée sur la classe de conjugaison de $\bar{x}$). Puisque G/Z est abélien, ses classes de conjugaison sont ses singletons. Ainsi, les trois classes de conjugaison non triviales de G sont envoyées sur les trois classes de G/Z différentes du neutre. Donc les classes de conjugaison de G sont $\{e\}$, $\{z\}$, $\{a, za\}$, $\{b, zb\}$ et $\{c, zc\}$.

On remplit alors la table de caractère de G avec les caractères de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ puis on trouve la dernière ligne à l'aide de la formule $\sum_i n_i \chi_i(g) = 0$ si $g \neq e$.

G	e	z	a	b	c
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

□

Cherchons les représentations irréductibles du groupe D_4. On rappelle que D_4 est l'ensemble des isométries d'un carré, ses éléments sont :

— id le neutre ;
— r_1, $r_2 = -\mathrm{id}$ et r_3 les rotations d'un quart de tout, d'un demi-tour, de trois quarts de tour ;
— s_1 et s_2 les symétries axiales par rapport aux médiatrices ;
— d_1 et d_2 les symétries axiales par rapport aux diagonales.

Les classes de conjugaisons de D_4 sont $\{\mathrm{id}\}$, $\{-\mathrm{id}\}$, $r = \{r_1, r_3\}$, $s = \{s_1, s_2\}$ et $d = \{d_1, d_2\}$. L'action naturelle de D_4 sur le carré donne la représentation irréductible de degré 2, notée $\rho_{\mathrm{nat}} : D_4 \to O_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$r_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad s_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant nous donne alors une représentation irréductible de degré 1 : $D_4 \to O_2(\mathbf{R}) \to \{\pm 1\}$. L'action de D_4 sur le carré induit une permutation sur les sommets du carré. La signature de cette permutation fournit alors une autre représentation irréductible de degré 1 : $D_4 \to \mathfrak{S}_4 \to \{\pm 1\}$. La dernière représentation de degré 1 non triviale est alors donnée par le produit de ces deux représentations.

D_4	id	$-$id	r	s	d
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	1	-1	1	-1
det	1	1	1	-1	-1
$\varepsilon \det$	1	1	-1	-1	1
χ_{nat}	2	-2	0	0	0

Référence

— CALDERO et GERMONI, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome II.*