Théorème de Fejér

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

Définition. On note D_n le noyau de Dirichlet et K_n le noyau de Fejér.

$$\mathrm{D}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{D}_n(x)$$

Alors ces noyaux s'écrivent aussi [1] :

$$\mathrm{D}_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

Lemme (continuité des translations dans L^p)**.** *Pour $p \in [1,+\infty[$, soit $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ et soit Φ_f l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathrm{L}^p_{2\pi} \\ a & \longmapsto & \tau_a f \end{array}$$

où $\tau_a f(x) = f(x-a)$. Alors Φ_f est uniformément continue.

Démonstration. On procède par densité. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons dans un premier temps que $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$. Par continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$,

$$|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Alors dès que $|a-b| \leqslant \delta$,

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-a)-f(x-b)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon$$

Supposons à présent que $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$. Par densité de $\mathrm{C}_{2\pi}$ dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$, il existe $g \in \mathrm{C}_{2\pi}$ telle que $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(b)-\Phi_f(a)\|_p &\leqslant \|\Phi_f(b)-\Phi_g(b)\|_p + \|\Phi_g(b)-\Phi_g(a)\|_p + \|\Phi_g(a)-\Phi_f(a)\|_p \\ &\leqslant 2\|f-g\|_p + \|\Phi_g(b)-\Phi_g(a)\|_p \\ &\leqslant 2\varepsilon + \|\Phi_g(b)-\Phi_g(a)\|_p \end{aligned}$$

On conclut par continuité uniforme de Φ_g. □

Théorème.

1. *Si $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$, alors $\|\mathrm{K}_n * f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et $(\mathrm{K}_n * f) \to f$ uniformément.*
2. *Si $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$, alors $\|\mathrm{K}_n * f\|_p \leqslant \|f\|_p$ et $(\mathrm{K}_n * f) \to f$ dans L^p, $p \in [1,+\infty[$.*

Démonstration.

1. Posons $I = [-\pi,\pi]$. Comme $\frac{1}{2\pi}\int_I \mathrm{K}_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$, on a $\|\mathrm{K}_n * f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et soient $x \in \mathbf{R}$ et $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \left|(\mathrm{K}_n * f)(x) - f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}_n(y)\left|f(x-y)-f(x)\right|\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{K}_n(y)\left|f(x-y)-f(x)\right|\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi}\int_{I\setminus[-\delta,\delta]} \mathrm{K}_n(y)\left|f(x-y)-f(x)\right|\mathrm{d}y \end{aligned}$$

1. je ne le montre pas dans le développement.

Par continuité uniforme de f, il existe δ tel que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $|y| \leqslant \delta \Rightarrow \left|f(x-y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$. Pour un tel δ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\left|(\mathrm{K}_n * f)(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Donc :

$$\limsup_{n \to +\infty} \|(\mathrm{K}_n * f) - f\|_\infty \leqslant \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

2. On applique l'inégalité de Hölder avec la mesure de probabilité $\mathrm{K}_n(y)\frac{\mathrm{d}y}{2\pi}$.

$$\left|(\mathrm{K}_n * f)(x)\right|^p \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x-y)\right| \mathrm{K}_n(y) \frac{\mathrm{d}y}{2\pi}\right)^p \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x-y)\right|^p \mathrm{K}_n(y)\,\mathrm{d}y\right) \times 1$$

On intègre et on utilise Fubini–Tonelli :

$$\|\mathrm{K}_n * f\|_p^p \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tau_y f(x)\right|^p \mathrm{K}_n(y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|\tau_y f\|_p^p \mathrm{K}_n(y)\,\mathrm{d}y = \|f\|_p^p$$

Le même calcul appliqué à $(\mathrm{K}_n * f) - f$ donne :

$$\|(\mathrm{K}_n * f) - f\|_p^p \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|\tau_y f - f\|_p^p \mathrm{K}_n(y)\,\mathrm{d}y = (\mathrm{K}_n * g)(0)$$

où $g(y) = \|\tau_{-y} f - f\|_p^p$. Par le lemme, la fonction g est continue donc $(\mathrm{K}_n * g)(0) \to g(0) = 0$.

□

Références

— BECK, MALICK et PEYRÉ, *Objectif agrégation.*
— QUEFFÉLEC et ZUILY, *Analyse pour l'agrégation.*