Formule d'Euler–Maclaurin et développement asymptotique de la série harmonique

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

Définition. On note (B_p) les polynômes de Bernoulli *périodisés* et $b_p = B_p(0)$ les nombres de Bernoulli.

Théorème (formule d'Euler–Maclaurin)**.** *Soient $m < n$ des entiers et soit $r \in \mathbf{N}^*$. Soit $f : [m,n] \to \mathbf{C}$ de classe C^r. Alors :*

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{p=2}^{r} \frac{b_p}{p!}\left[f^{(p-1)}(n) - f^{(p-1)}(m)\right] + R_r$$

où le reste R_r est donné par :

$$R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n B_r(t) f^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Par récurrence sur r :

— Cas $r = 1$. Soit $k \in [\![m, n-1]\!]$. Par définition, pour tout $x \in\,]0,1[$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Ainsi, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_k^{k+1} B_1'(t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[B_1(t)f(t)\Big]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} B_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} B_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En sommant pour k allant de m à $n-1$:

$$\int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \frac{f(m)+f(n)}{2} - \int_m^n B_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

— Supposons le résultat vrai au rang $r-1$ et montrons-le au rang $r > 1$. Soit $k \in [\![m, n-1]\!]$. En utilisant le fait que $B_r' = rB_{r-1}$ et $B_r(0) = B_r(1) = b_r$, et en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(r-1)!}\int_k^{k+1} B_{r-1}(t) f^{(r-1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{r!}\int_k^{k+1} B_r'(t) f^{(r-1)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{r!}\Big[B_r(t) f^{(r-1)}(t)\Big]_k^{k+1} - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1} B_r(t) f^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{b_r}{r!}\left[f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)\right] - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1} B_r(t) f^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En multipliant par $(-1)^r$ et en sommant pour k allant de m à $n-1$:

$$R_{r-1} = \frac{(-1)^r b_r}{r!}\left[f^{(r-1)}(m) - f^{(r-1)}(n)\right] + R_r$$

Si r est pair, alors $(-1)^r b_r = b_r$ et si r est impair, $(-1)^r b_r = 0 = b_r$. On obtient la formule voulue.

□

Application. *Notons* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*, alors on a le développement asymptotique lorsque* $n \to +\infty$ *:*

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{b_{2k}}{2k} \frac{1}{n^{2k}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2r}}\right)$$

Démonstration. On applique la formule d'Euler–Maclaurin à $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, n]$. Les dérivées de f sont données par $f^{(p)}(t) = \frac{(-1)^p p!}{t^{p+1}}$. La formule s'écrit :

$$H_n = \log n + \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \sum_{p=2}^{r} \frac{b_p}{p!} \left[\frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{n^p} - (-1)^{p-1}(p-1)! \right] + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_1^n B_r(t) \frac{(-1)^r r!}{t^{r+1}} \,\mathrm{d}t$$

$$H_n = \log n + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{r} (-1)^p \frac{b_p}{p} - \int_1^{+\infty} B_r(t) \frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}} \right)}_{=\gamma_r} + \frac{1}{2n} + \sum_{p=2}^{r} (-1)^{p-1} \frac{b_p}{p} \frac{1}{n^p} + \varepsilon_r(n)$$

où $\varepsilon_r(n) = \int_n^{+\infty} B_r(t) \frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}}$. Comme B_r est borné sur $\mathbf{R}$, on a $\left|\varepsilon_r(n)\right| \leqslant M \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Ainsi :

$$H_n = \log n + \gamma_r + \frac{1}{2n} + \sum_{p=2}^{r-1} (-1)^{p-1} \frac{b_p}{p} \frac{1}{n^p} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Enfin, $\gamma_r = \lim(H_n - \log n) = \gamma$ et si p est impair alors $b_p = 0$, donc pour tout $r \geqslant 1$:

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{b_{2k}}{2k} \frac{1}{n^{2k}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2r}}\right)$$

□

Références

— DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles.*
— GOURDON, *Les maths en tête, analyse.*