Formule de Stirling, par le TCL

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

Définition. Soient a, λ des réels strictement positifs, on appelle loi gamma de paramètres a et λ, notée $\Gamma(a,\lambda)$, la loi de densité $f_{a,\lambda}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$$

Notons que la loi $\Gamma(1,\lambda)$ est la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

Lemme (stabilité de la loi gamma)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\Gamma(a,\lambda)$ et $\Gamma(b,\lambda)$. Alors $X+Y$ suit la loi $\Gamma(a+b,\lambda)$.*

Démonstration. Les variables X et Y sont indépendantes donc la densité de $X+Y$ est le produit de convolution $f_{a,\lambda} * f_{b,\lambda}$. Pour $x \leqslant 0$, ce produit est nul et pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
(f_{a,\lambda} * f_{b,\lambda})(x) &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (x-t)^{a-1} \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \mathbf{1}_{x-t>0} \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} t^{b-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbf{1}_{t>0} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^x (x-t)^{a-1} t^{b-1} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^1 (x-xu)^{a-1} (xu)^{b-1} x \,\mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\left(\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} \,\mathrm{d}u \right)}_{=C} x^{a+b-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Ainsi, $(f_{a,\lambda} * f_{b,\lambda})(x) = C x^{a+b-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$. Comme c'est une densité de probabilité, on a nécessairement $C = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}$ et donc $X+Y$ suit la loi $\Gamma(a+b,\lambda)$. De plus on en déduit la relation :

$$\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} \,\mathrm{d}u}_{=\mathrm{B}(a,b)} = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a,b)$$

□

Proposition (formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$$

Démonstration. Soient $(X_i)_{i\geqslant 0}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathscr{E}(1)$ et posons $S_n = X_0 + \cdots + X_n$. D'après le lemme, S_n suit la loi $\Gamma(n+1,1)$. D'après le théorème central limite :

$$\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1)$$

Par le lemme de Slutsky[1] :

$$Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}_{\to 1} \left(\underbrace{\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}}}_{\xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1)} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\to 0} \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1)$$

Cherchons la loi de Y_n. Soit f une fonction mesurable bornée :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[f(Y_n)\big] &= \int_{\mathbf{R}} f\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{n!} x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathbf{1}_{x>0} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(y) \frac{1}{n!} \big(n + y\sqrt{n}\big)^n \, \mathrm{e}^{-n-y\sqrt{n}} \, \mathbf{1}_{\{y>-\sqrt{n}\}} \sqrt{n} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(y) \underbrace{\frac{n^{n+\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-n}}{n!} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \, \mathbf{1}_{\{y>-\sqrt{n}\}}}_{=g_n(y)} \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Donc Y_n admet pour densité $g_n(y) = a_n \, h_n(y)$ où :

$$a_n = \frac{\sqrt{2\pi} \, n^{n+\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-n}}{n!} \qquad h_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \, \mathbf{1}_{\{y>-\sqrt{n}\}}$$

D'un côté, comme $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1)$, on a $\int_0^1 g_n(y) \, \mathrm{d}y \to \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}y$. D'un autre côté, pour $y \in [0,1]$:

$$h_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{n \log\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2} + \mathrm{o}(1)}$$

où le $\mathrm{o}(1)$ est uniforme[2] en $y \in [0,1]$. Par conséquent :

$$\int_0^1 h_n(y) \, \mathrm{d}y \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}y$$

Donc a_n tend vers 1. □

Référence

— GARET et KURTZMAN, *De l'intégration aux probabilités*. C'est un exercice du chapitre où se trouve le TCL.

1. si X_n tend en loi vers X et si Y_n tend en probabilité vers c constante déterministe, alors (X_n, Y_n) tend en loi vers (X, c). Je mets ce résultat dans le plan et je ne le montre pas dans le développement.
2. reste de Taylor–Lagrange + compacité de $[0,1]$.