Loi des grands nombres L^2

Florian Dussap

Agrégation 2018

Lemme (Borel–Cantelli)**.** *Si la série $\sum_n \mathbf{P}(A_n)$ est finie, alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.*

Démonstration. En une ligne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n}) = \mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n}\right) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n} < +\infty \text{ p.s.}$$

□

Lemme. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_n \mathbf{P}\big(|Y_n - Y| > \varepsilon\big)$ est finie, alors Y_n tend vers Y presque sûrement.*

Démonstration. Posons $A_{n,k} = \big\{|Y_n - Y| > 2^{-k}\big\}$. Alors par le lemme de Borel–Cantelli, $\mathbf{P}(\limsup_n A_{n,k})$ est nulle, pour tout k. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \big\{\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N,\ |Y_n - Y| \leqslant 2^{-k}\big\} \text{ p.s.}$$

Or, une intersection dénombrable d'évènements p.s. reste p.s. [1] donc :

$$\big\{\forall k \in \mathbf{N},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N,\ |Y_n - Y| \leqslant 2^{-k}\big\} \text{ p.s.}$$

D'où $Y_n \to Y$ presque sûrement. □

Théorème. *Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles L^2 deux à deux non corrélées telles que $\sup_i \mathrm{Var}(X_i)$ est fini. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors :*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$$

Démonstration. Posons $M = \sup_i \mathrm{Var}(X_i)$. Quitte à poser $X'_i = X_i - \mathbf{E}(X_i)$, on peut supposer que $\mathbf{E}(X_i) = 0$. Par linéarité, $\mathbf{E}(S_n) = 0$, montrons donc que $\frac{S_n}{n}$ tend vers 0 presque sûrement. Pour cela, calculons la variance de $\frac{S_n}{n}$:

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{=0}\right) \leqslant \frac{M}{n}$$

Par l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, $\mathbf{P}\big(|\frac{S_n}{n}| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{M}{n\varepsilon^2}$, qui ne donne pas une série finie. On considère alors la suite extraite $\frac{S_{n^2}}{n^2}$: $\mathbf{P}\big(|\frac{S_{n^2}}{n^2}| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{M}{n^2\varepsilon^2}$, qui le terme général d'une série convergente. Par le lemme, on obtient que $\frac{S_{n^2}}{n^2}$ tend vers 0 presque sûrement.

Posons $p = p(n) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2$. Alors [2] pour tout $n \geqslant 4$, $n - p \leqslant 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant 2\sqrt{n}$ et $n - p \leqslant p$. En effet, par définition de la partie entière :

$$\sqrt{n} < \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \Longrightarrow n < p + 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \Longrightarrow n - p \leqslant 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

Par ailleurs, $2\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2$ car $n \geqslant 4$, d'où le résultat annoncé.

1. car une union dénombrable d'ensembles négligeables reste négligeable.
2. ce passage est faux dans [GK].

Soit $D_{n,p} = X_{p+1} + \cdots + X_n$. Montrons que $\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}$ tend vers 0 presque sûrement. On écrit :

$$\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n} = \frac{S_p}{p} - \frac{S_p + D_{n,p}}{n} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) S_p - \frac{D_{n,p}}{n}$$

On calcule alors la variance de $\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}$ en remarquant que $\mathrm{Cov}(S_p, D_{n,p}) = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}\right) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{Var}(S_p) + \frac{\mathrm{Var}(D_{n,p})}{n^2} \\
&\leqslant \left(\frac{n-p}{np}\right)^2 pM + \frac{(n-p)M}{n^2} \\
&\leqslant \frac{(n-p)M}{n^2}\left(\frac{n-p}{p} + 1\right) \\
&\leqslant \frac{4M}{n^{3/2}}
\end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série convergente, on procède alors comme précédemment : on applique l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev puis le lemme et on en déduit que $\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}$ tend vers 0 presque sûrement.

Comme $p(n)$ tend vers l'infini, que $p(n)$ est croissante, et que la suite $\frac{S_{n^2}}{n^2}$ tend vers 0 presque sûrement, alors $\frac{S_{p(n)}}{p(n)}$ tend vers 0 presque sûrement. Par conséquent, $\frac{S_n}{n} = \frac{S_p}{p} - \left(\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}\right)$ tend vers 0 presque sûrement. □

Référence

— Garet et Kurtzman, *De l'intégration aux probabilités*.