Théorèmes de Cochran et de Fisher

Florian Dussap

Agrégation 2018

Théorème 1 (Cochran)**.** *Soit X un vecteur gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance I_d. On considère $E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ une décomposition de $\mathbf{R}^d$ en sous-espaces orthogonaux de dimensions respectives $d_1, \ldots, d_r$. Alors les projections orthogonales $P_{E_1}(X), \ldots, P_{E_r}(X)$ sont des vecteurs gaussiens indépendants. De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,*

$$\|P_{E_i}(X)\|^2 \sim \chi^2(d_i)$$

Démonstration. Soit $\mathscr{B}_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,d_i})$ une base orthonormée de E_i et notons $Y_{i,j} = \langle X \mid e_{i,j} \rangle$. Alors $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_r)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^d$ et les $(Y_{i,j})$ sont les coordonnées de X dans cette base. Soit $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à la base canonique. En notant :

$$Y_i = \begin{pmatrix} Y_{i,1} \\ \vdots \\ Y_{i,d_i} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \hline \vdots \\ \hline Y_r \end{pmatrix}$$

on en déduit que $Y = QX$ suit la loi $\mathscr{N}(0, Q\,\mathrm{I}_d\,{}^{\mathrm{t}}Q) = \mathscr{N}(0, \mathrm{I}_d)$. Donc les $(Y_{i,j})$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Or comme :

$$P_{E_i}(X) = \sum_{j=1}^{d_i} Y_{i,j}\, e_{i,j}$$

on obtient que $P_{E_1}(X), \ldots, P_{E_r}(X)$ sont des vecteurs gaussiens indépendants. Enfin, en prenant le carré de la norme :

$$\|P_{E_i}(X)\|^2 = \sum_{j=1}^{d_i} Y_{i,j}^2 \sim \chi^2(d_i)$$

□

Théorème 2 (Fisher)**.** *Soit ν une loi sur $\{1, \ldots, q\}$ telle que $\nu(j) > 0$ pour tout j et soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi ν. Notons :*

$$N_{n,j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = j\}} \qquad T_n = \sum_{j=1}^{q} \frac{\big(N_{n,j} - n\,\nu(j)\big)^2}{n\,\nu(j)}$$

Alors :

$$T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} \chi^2(q-1)$$

Démonstration. Soit $Y_i = (\mathbf{1}_{X_i = 1}, \ldots, \mathbf{1}_{X_i = q})$ et soit $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n = (N_{n,1}, \ldots, N_{n,q})$. On remarque que les (Y_i) sont des variables aléatoires i.i.d. de même espérance $\mathbf{E}(Y_1) = \big(\nu(1), \ldots, \nu(q)\big)$. Notons Γ la matrice de covariance de Y_1. Par le théorème central limite multidimensionnel :

$$Z_n = \frac{S_n - n\,\mathbf{E}(Y_1)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} Z$$

où Z suit la loi $\mathscr{N}(0, \Gamma)$. Par le théorème de l'image continue :

$$T_n = \sum_{j=1}^{q} \frac{Z_{n,j}^2}{\nu(j)} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} \sum_{j=1}^{q} \frac{Z_j^2}{\nu(j)} = \|DZ\|^2, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\nu(1)}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\nu(q)}} \end{pmatrix}$$

Il reste à montrer que $\|DZ\|^2$ suit la loi $\chi^2(q-1)$. Remarquons que DZ est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $D\Gamma\,{}^{\mathrm{t}}D$. Calculons les coefficients de Γ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j} &= \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_{X=i}, \mathbf{1}_{X=j}) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X=i}\mathbf{1}_{X=j}) - \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X=i})\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_{X=j}) \\
&= \delta_{i,j}\,\nu(i) - \nu(i)\,\nu(j) \\
&= \sqrt{\nu(i)}\left(\delta_{i,j} - \sqrt{\nu(i)}\sqrt{\nu(j)}\right)\sqrt{\nu(j)}
\end{aligned}$$

Notons $c_{i,j} = \delta_{i,j} - \sqrt{\nu(i)}\sqrt{\nu(j)}$ et C la matrice des $(c_{i,j})$, de sorte que $D\Gamma\,{}^{\mathrm{t}}D = C$. On remarque que :

$$\mathrm{I}_q - C = \left(\sqrt{\nu(i)}\sqrt{\nu(j)}\right)_{i,j} = v\,{}^{\mathrm{t}}v, \quad v = \begin{pmatrix} \sqrt{\nu(1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\nu(q)} \end{pmatrix} \text{ unitaire}$$

Ainsi, $\mathrm{I}_q - C$ est la matrice de projection orthogonal sur $\mathrm{Vect}(v)$. Donc C est la matrice de projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v)^\perp$. Le vecteur DZ a donc la même loi que la projection orthogonale d'un vecteur gaussien centré réduit sur $\mathrm{Vect}(v)^\perp$. Par le théorème de Cochran, $\|DZ\|^2$ suit la loi $\chi^2(q-1)$. □

Références

— GARET et KURTZMAN, *De l'intégration aux probabilités.*
— RIVOIRARD et STOLTZ, *Statistique mathématique en action.*