Dév. (20) Formule d'Euler - Mac Laurin

Leçons
224 Exemples de développement asymptotiques de suite de fonctions
228 Continuité et dérivabilité des fonctions à var. réelle
230 Séries, reste et sommes partielles
243 Convergence des séries entières. Propriétés de la somme.
246 Séries de Fourier

Réf : Candelpergher, Gourdon

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$.
Soit (P_n) une suite de polynômes t.q. $P_0(X) = 1$, $P_n'(X) = P_{n-1}(X)$.

Alors des IPP permettent d'écrire :

$$(*) \quad \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x) P_0(x)\,dx = \Big[f(x) P_1(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x) P_1(x)\,dx$$

$$= (\dots) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \Big[f^{(k-1)}(x) P_k(x)\Big]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 f^{(m)}(x) P_m(x)\,dx$$

Objectif : On veut pouvoir faire des sommes télescopiques pour avoir $\int_p^q f(x)\,dx$.
il faut alors que les P_k aient la même valeur en 0 et en 1 :

$$\forall n \geq 2, \quad P_n(0) = P_n(1) \quad \text{i.e.} \quad \forall n \geq 1, \int_0^1 P_n(x)\,dx = 0.$$

$n=1$: $\begin{cases} \int_0^1 P_1(x)\,dx = 0 \\ P_1'(X) = P_0(X) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 (x+c_1)\,dx = 0 \\ P_1(X) = X + c_1 \end{cases} \Rightarrow P_1(X) = X - \frac{1}{2}$

$n=2$: $\begin{cases} \int_0^1 P_2(x)\,dx = 0 \\ P_2'(X) = P_1(X) = X - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 (x^2 - \frac{1}{2}x + c_2)\,dx = 0 \\ P_2(X) = X^2 - \frac{1}{2}X + c_2 \end{cases} \Rightarrow P_2(X) = X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$

et ainsi de suite : cette méthode fournit l'existence et l'unicité de tels P_i.

Déf : On appelle <u>polynômes de Bernoulli</u> les $B_i(X) := i!\, P_i(X)$,
et nombres de Bernoulli les $b_i = B_i(0)$.

Pour : tout $n \neq 1$, $B_n(0) = B_n(1)$ et pour n impair ≥ 3, $B_n(0) = 0$.

La formule ci-dessus (*) devient :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k!} \Big[f^{(k-1)}(x)\Big]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\,dx$$

Si l'on pose $\overline{B}_k(x) = B_k(x - \lfloor x \rfloor)$, i.e. la fonction périodique de période 1 égale à B_k sur $[0,1[$:

$$\int_l^{l+1} f(x)\,dx = \frac{f(l)+f(l+1)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} B_k \left[f^{(k-1)}(x)\right]_l^{l+1} + (-1)^m \int_l^{l+1} \frac{\overline{B}_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\,dx$$

En sommant pour l allant de p à $q-1$, $p,q \in \mathbb{N}$:

Thm : Euler-Maclaurin

$$\int_p^q f(x)\,dx = \frac{f(p)}{2} + f(p+1) + \dots + f(q-1) + \frac{f(q)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} B_k \left[f^{(k-1)}(x)\right]_p^q + (-1)^m \int_p^q \frac{\overline{B}_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\,dx$$

Application 1 : Série harmonique (Gourdon)

Appliquons à $f(x) = \frac{1}{x}$ entre 1 et n, avec $f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^k k!}{t^{k+1}}$:

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} B_k \left[\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right]_1^n + (-1)^m \int_1^n \frac{\overline{B}_m(x)}{m!} \cdot \frac{(-1)^{m-1} m!}{x^{m+1}}\,dx$$

$$H_n = \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k}\left(\frac{1}{n^k} - 1\right) + \int_1^n \frac{\overline{B}_m(x)}{x^{m+1}}\,dx$$

$$H_n = \ln n + \underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k} + \int_1^\infty \frac{\overline{B}_m(x)}{x^{m+1}}\,dx}_{\gamma_m} - \int_n^\infty \frac{\overline{B}_m(x)}{x^{m+1}}\,dx - \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k n^k}$$

Ce qu'on peut faire car $\overline{B}_m$ est borné sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{\overline{B}_m(x)}{x^{m+1}}$ est intégrable

Or : $\left|\int_n^\infty \frac{\overline{B}_m(x)}{x^{m+1}}\,dx\right| \leq \|\overline{B}_m\|_\infty \cdot \frac{1}{(m+1)n^{m+1}} = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$,

et $H_n - \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma_m$ donc γ_m ne dépend pas de m.

On obtient : $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma - \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k n^k} + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$.

□