Dév. (17) — Autour de l'équation matricielle $AX + BX = C$

Réf : Gourdon

Dév pour les leçons : 162 Systèmes d'équations linéaires
221 Équations différentielles linéaires

Thm : Soient A, B, C des matrices réelles, avec $\forall \lambda \in Sp(A) \cup Sp(B)$, $Re(\lambda) < 0$.
Alors $\exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AX + BX = C$.

Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\forall \lambda \in Sp A$, $Re(\lambda) < 0$.
Alors pour toute norme d'algèbre $\|\cdot\|$, $\exists \alpha > 0, K > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$.

Dunford : $A = D + N$, $D = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$, et $e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$.

$\rightarrow$ $\left\| e^{t\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}} \right\|_\infty = \sup |e^{t\lambda_i}| \leq e^{-ct}$ avec $c = -\sup Re(\lambda_i) > 0$,

d'où par équivalence des normes $\left\| e^{t\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}} \right\| \leq K_1 e^{-ct}$,

donc $\|e^{tD}\| \leq K_2 e^{-ct}$, $K_2 = \|P^{-1}\| \times \|P\| \times K_1$.

$\rightarrow$ $\|e^{tN}\| = \|I_n + tN + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1}\| \underset{t\to\infty}{=} O(t^n) \underset{t\to\infty}{=} o(e^{\frac{ct}{2}})$

d'où $\|e^{tA}\| \underset{t\to\infty}{=} o(e^{\frac{-ct}{2}})$, d'où le résultat. $\square$

Considérons maintenant l'équadiff $Y' = AY + YB$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le système linéaire à coeffs constants $\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + Y(t)B \\ Y(0) = C \end{cases}$ admet une unique solution $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $Y(t) = e^{tA} C e^{tB}$ convient, donc c'est la bonne.

Intégrons entre 0 et t : $Y(t) - C = A\int_0^t Y(s)ds + \int_0^t Y(s)ds\, B$ $\quad (*)$

Or $\|Y(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \times \|C\| \times Me^{-\alpha t}$, où $M > 0$ et $\alpha > 0$ sont données par le lemme

donc $\int_0^{+\infty} Y(s)ds$ converge absolument, et $\|Y(t)\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

d'où dans $(*)$: $-C = A\int_0^{+\infty} Y(s)ds + \int_0^{+\infty} Y(s)ds\, B$,

donc $X = -\int_0^{+\infty} Y(s)ds$ est solution.

$\longrightarrow$

On a montré que $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX+XB \end{array}$ est un endomorphisme surjectif,

il est également injectif (puisque dim. finie), ce qui garantit l'unicité de la solution.

$\square$.