# Dév. (13) _ Base d'Auerbach

Leçons
- 151 Dimension d'un EV, rang
- 152 Déterminant
- 159 Formes linéaires en dimension finie et dualité
- 208 EVN, applications linéaires continues

Réf: FGN Algèbre 2

**Thm:** Soit $V$ un evn de dim. finie $n \geq 1$. Il existe une base de $V$ (formée de vecteurs) unitaire(s), dont la base duale est elle aussi unitaire.

(1) Il s'agit de minimiser un truc.

Si $B = (e_1 - e_n)$ est une base unitaire, alors $\forall i$, $\|e_i^*(e_i)\| = 1$ donc $|||e_i^*||| \geq 1$, il s'agit donc de ~~minimi~~ trouver $B$ minimisant $|||e_i^*|||$.

(2) Exemple d'un EV euclidien: $e_i^*(x) = \langle e_i | x \rangle$,

d'où $|e_i^*(x)| \leq \|e_i\| \|x\| = \|x\|$, $|||e_i^*||| = 1$ et c'est plié.

→ On voudrait caractériser les BON, sans utiliser la spécificité des esp. eucl. (le Π scalaire).

inég. de Hadamard : $|\det_{B_0}(e_1 - e_n)| \leq \|e_1\| \times \cdots \times \|e_n\| = 1$, où $B_0$ est une BON fixée, avec égalité ssi $(e_1 - e_n)$ est ON.

(3) Étendons le raisonnement. Quelles bases unitaires maximisent $|\det|$?

Fixons $B_0$, notons $S$ la sphère unité de $V$, considérons l'applic°

$$\begin{aligned} S \times \cdots \times S &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1 - x_n) &\longmapsto |\det_{B_0}(x_1 - x_n)| \end{aligned},$$

continue sur $S^n$ compact, donc elle atteint son maximum.

Soit $B = (e_1 - e_n)$ un point où elle est maximale.

Elle est non nulle ~~pas~~ donc $|\det_{B_0} B| \neq 0$ donc $B$ est une base, unitaire.

(4) On a déjà $|||e_i^*||| \geq 1$, montrons l'égalité.

Soit $x \in S$, on a $|\det_{B_0}(e_1 - \underset{\uparrow \text{ i-ième position}}{x} - e_n)| \leq |\det_{B_0}(e_1 - e_n)|$ par maximalité.

Or $\left|\det_{\mathcal{B}_0}(e_1 — x — e_n)\right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_0}(e_1 — e_j — e_n)\, e_j^*(x) \right|$

$$= \left| e_i^*(x) \det_{\mathcal{B}_0}(e_1 — e_n) \right|$$

d'où $|e_i^*(x)| \leq 1$, soit enfin $|||e_i^*||| = 1$. □

---

**Inégalité de Hadamard :** $|\det(x_1 — x_n)| \leq \|x_1\| \times \dots \times \|x_n\|$,

où $\|x\| = \sqrt{x^* x}$ désigne la norme hermitienne standard.

---

(1) → si $\det(x_1 — x_n) = 0$, c'est immédiat.

→ sinon $(x_1 — x_n)$ est une base. On orthonormalise en $(y_1 — y_n)$ :

$$y_k = x_k + \lambda_{k,1} y_1 + \dots + \lambda_{k,k-1} y_{k-1},$$

le déterminant étant conservé.

Notons $M = (y_1 | \dots | y_n)$, $\quad M^*M = (y_i^* y_j)_{i,j} = \begin{pmatrix} \|y_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|y_n\|^2 \end{pmatrix}$,

d'où $\det(M^*M) = \cancel{|\det M|^2 =} \prod_{i=1}^{n} \|y_i\|^2$

d'où $|\det(M)| = \prod_{i=1}^{n} \|y_i\| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\| = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\|y_k\|^2 + |\lambda_{k,1}|^2 \|y_1\|^2 + \dots + |\lambda_{k,k-1}|^2 \|y_{k-1}\|^2}$

donc enfin $|\det(x_1 — x_n)| = |\det M| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$.

(2) Cas d'égalité : les $x_i$ sont orthogonaux $\Rightarrow$ égalité.

Récip$^t$, s'il y a égalité, le calcul précéd. impose $\|x_i\| = \|y_i\|$ pour tout $i$, donc les $\lambda_i$ sont tous nuls, donc $x_i = y_i$, donc les $x_i$ sont orthogonaux.

□.