Réduction de Jordan (cas f)

Théo: Soit E un K-ev de dim n et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'ordre $p \leq n$. Alors il existe une unique suite d'entiers $n_1 = p \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 1$ et une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}(\mathcal{B}, f) = \begin{bmatrix} J_{n_1} & & & 0 \\ & J_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_r} \end{bmatrix} \quad \text{où } J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

Dém: Idée récurrence sur la dimension de E. Pour cela besoin de sous espaces stables.

Lemme: Soit $x_0 \in E$ | $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Soit $F = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$. Alors F est stable par f et il existe un supplémentaire G de F dans E stable par f.

Dém (lemme):

Notons $e_1 = f^{p-1}(x_0), \dots, e_p = x_0$ (libre) que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale.

Soit $\Gamma = \mathrm{Vect}_{k \geq 0}({}^t f^k(e_1^*)) = \mathrm{Vect}(e_1^*, \dots, {}^t f^{p-1}(e_1^*))$ $({}^t f^p = 0$ car $f^p = 0)$

sev de E^*

Posons $G = \Gamma^\perp$ sev de E.

• dim $G = n - p$:

$$\langle {}^t f^{p-1}(e_1^*), x_0 \rangle = \langle e_1^*, \underbrace{f^{p-1}(x_0)}_{e_1} \rangle = 1$$

donc ${}^t f^{p-1}(e_1^*) \neq 0$, comme ${}^t f^p = 0$ $(e_1^*, \dots, {}^t f^{p-1}(e_1^*))$ libre

ie dim $\Gamma = p$ donc dim $G = n - p$

• $G \cap F = \{0\}$:

Soit $x \in G \cap F$.

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$: $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$

$= \lambda_1 f^{p-1}(x_0) + \dots + \lambda_p x_0$

$0 = \langle e_1^*, x \rangle = \lambda_1$

$0 = \langle {}^t f(e_1^*), x \rangle = \langle e_1^*, \underbrace{f(x)}\rangle = \lambda_2$

$= \lambda_2 e_1 + \dots + \lambda_p e_{p-1}$

⋮

$0 = \langle {}^t f^{p-1}(e_1^*), x \rangle = \langle e_1^*, f^{p-1}(x) \rangle = \lambda_p$

$x = 0$ d'où $F \cap G = \{0\}$

$\Rightarrow$ $E = F \oplus G$

• G stable par f :

$\forall x \in G, \forall k \in \mathbb{N}$: $\langle {}^t f^k(e_1^*), f(x) \rangle = \langle {}^t f^{k+1}(e_1^*), x \rangle = 0$

$f(x) \in G_0^{\perp} = G$

G est stable par f. □ (lemme)

Retour démo Th.

• Existence :

On montre le résultat par récurrence sur $\dim E = n$.

$\mathrm{mat}_F f = J_m$ $(m = p)$

et $f_{|G}^{\nu} = 0$ donc l'indice n_2 de nilpotence de $f_{|G}$, est $\le n$.

d'où le résultat.

• Unicité :

Notons pour $k \in [\![1,p]\!]$ ν_k le nombre de blocs de Jordan J_k de taille k. La donnée des (ν_k) équivaut à celle des (n_i)

Il vient :

$\dim \operatorname{Ker} f = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p$ (chaque bloc fournit un vecteur du noyau)

$\dim \operatorname{Ker} f^2 = \nu_1 + 2(\nu_2 + \cdots + \nu_p)$ [les blocs de taille 1 fournissent un vecteur et les autres 2 vecteurs)

$\vdots$

$\dim \operatorname{Ker} f^p = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + p\nu_p$

D'où :

$$\begin{cases} \nu_1 = 2\dim \operatorname{Ker} f - \dim \operatorname{Ker} f^2 \\ \nu_2 = -\dim \operatorname{Ker} f + 2\dim \operatorname{Ker} f^2 - \dim \operatorname{Ker} f^3 \\ \vdots \\ \nu_p = \dim \operatorname{Ker} f^p - \dim \operatorname{Ker} f^{p-1} \end{cases}$$

ce qui montre l'unicité ∎

Complément :

Thm (réduction de Jordan) : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j)$$

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_s \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{i,\alpha_i-1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$\forall (i,j)$ $\varepsilon_{i,j} \in \{0,1\}$

Dém : Le lemme des noyaux nous donne :

$E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ avec $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$

$\forall i \in [\![1, s]\!]$ N_i est stable par f et $(f_{|N_i} - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i} = 0$

On peut donc appliquer le résultat précédent à $f_{|N_i} - \lambda_i \mathrm{Id}$ pour obtenir le résultat.