Construction de va indépendantes de loi donnée.

Réf. Ouvrard

Prérequis : Soit X un va. et F sa fonction de répartition.
On définit G par
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G(t) = \inf(x \mid F(x) \geq t) \qquad \text{(pseudo-inverse)}$$
Alors si $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$ $G(Y)$ admet F comme fonction de répartition.

Thm : Soit $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Alors il existe une suite de va $(X_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), P)$ (P mesure de Lebesgue) telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, X_j soit de loi μ_j.

dém : Soit $x \in [0,1[$. On définit deux suites $D_n(x)$ et $R_n(x)$ par
$$R_0(x) = x$$
et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $D_n(x) = \lfloor 2R_{n-1}(x) \rfloor$ et $R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x)$

Par construction $D_n(x) \in \{0,1\}$ et $R_n(x) \in [0,1[$
et on a par récurrence : $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j(x)}{2^j} + \frac{1}{2^n} R_n(x)$

Ainsi $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{D_j(x)}{2^j}$

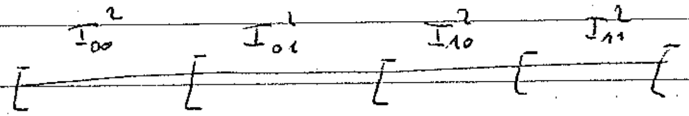
Lemme : Sur $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), P)$, la suite de va (D_n) est une suite de vaiid de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

dém : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout n-uplet $\overline{\varepsilon_n} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$

notons $I^n_{\varepsilon_n}$ l'intervalle $I^n_{\varepsilon_n} = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{2^j} , \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^n} \right[$

Cet intervalle est constitué des réels de $[0,1[$ dont le développement dyadique commence par $0,\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$

Ex : $n=2$



On a $\bigcap_{j=1}^{n} \{D_j = \varepsilon_j\} = I^n_{\varepsilon_n}$

Donc $\mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^{n} \{D_j = \varepsilon_j\} \right) = \frac{1}{2^n}$

Ainsi si $J \subset \{1, \dots, n\}$, $J \neq \emptyset$, on obtient en sommant sur les $\varepsilon_j \in J^c$
$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} \{D_j = \varepsilon_j\} \right] = \frac{1}{2^{|J|}}$$

En particulier, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ $\mathbb{P}(D_j = \varepsilon_j) = \frac{1}{2}$

Et $\mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} (D_j = \varepsilon_j) \right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[D_j = \varepsilon_j]$

Les (D_j) sont bien des Bernoulli indépendants $\square$.

<u>Retour démo :</u> Écrivons $\mathbb{N}^* = \coprod_{j \in \mathbb{N}^*} N_j$ où N_j est infini

Et soit φ_j la suite obtenue dans l'ordre croissant des éléments de N_j.

Posons $Y_j = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} D_{\varphi_j(k)}$

Les variables Y_j sont indépendantes car Y_j est mesurable par rapport à $\sigma(D_n, n \in N_j)$

• Mq $Y_j \sim \mathcal{U}([0,1[)$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $Y_{j,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} D_{\varphi_j(k)}$ et $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} D_k$

$Y_{j,n}$ et Z_n ont même loi.
Notons que $Z = \lim_n \uparrow Z_n$ est la fonction identité sur $[0,1[$

Ainsi, comme $(Z \leq y) = \lim_n \downarrow (Z_n \leq y)$

et $(Y_j \leq y) = \lim \downarrow (Y_{j,n} \leq y)$

$$\mathbb{P}(Y_j \leq y) = \lim_n \mathbb{P}(Y_{j,n} \leq y) = \lim \mathbb{P}[Z_n \leq y]$$
$$= \mathbb{P}[Z \leq y] = y$$

(Y_j) est donc une suite de v.a.i.i.d de loi $\mathcal{U}([0,1[)$

En notant F_j la fonction de répartition de μ_j et G_j la pseudo-inverse. Alors $X_j = G_j(Y_j)$ convient.