Résolution d'une équation matricielle grâce aux équations différentielles

Réf: Gourdon analyse p390

Thm: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que:

$\forall \lambda \in Sp(A) \cup Sp(B)$, $Re(\lambda) < 0$.

Alors pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AX + XB = C$.

dém: Existence: On considère l'équation différentielle linéaire:

$$\begin{cases} Y' = AY + YB \\ Y(0) = C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On vérifie que $Y(t) = \exp(tA)\, C \exp(tB)$ convient.

- On intègre l'équation différentielle entre 0 et t. On obtient:

$$Y(t) - C = A\int_0^t Y(s)\,ds + \int_0^t Y(s)\,ds\, B \qquad (*)$$

Lemme: Pour toute norme d'algèbre $\|\cdot\|$, il existe $\alpha > 0$ et $\Pi > 0$ telles que $\begin{cases} \|e^{tA}\| \leq \Pi e^{-\alpha t} \\ \|e^{tB}\| \leq \Pi e^{-\alpha t} \end{cases}$ pour tout $t \geq 0$

dém. On considère la décomposition de Dunford de A.

$A = D + N$ avec $\begin{cases} D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \\ DN = ND \end{cases}$

Soit $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$.

Alors $\exp(tD) = P^{-1} \underbrace{\operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})}_{\|\cdot\|_\infty = e^{-ct}} P$ pour $t \geq 0$

où $c = -\sup_i \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$

Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, $\exists k > 0$ tel que, $\forall t \geq 0$ $\|\exp(tD)\| \leq \|P^{-1}\| \, K e^{-ct} \|P\|$.

- D'autre part, comme N est nilpotente, on a :
$\exp(tN) = I_n + tN + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1}$

D'où $\|\exp(tN)\| = o(t^n)$ (lorsque $t \to +\infty$)

- N et D commutent, donc $e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$
Ainsi : $\|\exp(tA)\| \leq \|e^{tD}\| \, \|e^{tN}\| = o(e^{-ct} t^n)$

et $t^n = o(e^{ct/2})$ donc $\|e^{tA}\| = o(e^{-\frac{c}{2}t})$

En prenant $\alpha = -\frac{1}{2} \sup_{\lambda \in Sp(A) \cup Sp(B)} \{\operatorname{Re}(\lambda)\} > 0$ on a le résultat pour A et B. $\square$

Retour dém :
Par le lemme :
$\|Y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \, \|C\| \, \|e^{tB}\| \leq K e^{-2\alpha t}$ $(K = M^2 \|C\|)$

Ainsi $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} Y(s) ds$ converge absolument, donc converge.

En faisant tendre t vers $+\infty$ dans $(*)$ on obtient :

$$C = AX + XB \quad \text{avec} \quad X = -\int_0^{+\infty} Y(s)\,ds .$$

. Unicité :

L'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est surjective d'après ci-dessus.
$X \mapsto AX + XB$

Par dimension elle est injective d'où l'unicité.