Colobu

Décomposition polaire

Théorème : On a un homéomorphisme $\mu : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$
$$(O, S) \mapsto OS$$

Preuve : μ est définie et continue.

1) Surjectivité

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (car ${}^tx({}^tMM)x = \|Mx\|_2^2 > 0$ si $x \neq 0$)

Donc ${}^tMM$ est diagonalisable en base orthonormée :

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ ${}^tMM = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}{}^tP$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. (${}^tP = P^{-1}$ car $P \in O_n(\mathbb{R})$)

De plus, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$, ${}^tMM = PD^2\,{}^tP$

Posons $S = PD\,{}^tP$

On a $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\sqrt{\lambda_i} > 0$ et ${}^tS = S$.

On a redémontré l'existence d'une racine carrée.

On a $S^2 = {}^tMM$. Si on pose $O = MS^{-1}$, alors $M = OS$.

De plus, ${}^tOO = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. Donc $O \in O_n(\mathbb{R})$

2) Injectivité

Si $M = OS = O'S'$ avec $O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et OS comme précédemment,

alors $S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'S' = S'^2$.

Soit Q tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (donné par exemple par les interpolateurs de Lagrange)

On a alors $S = PD\,{}^tP = P\,Q(D^2)\,{}^tP = Q(PD^2\,{}^tP) = Q({}^tMM) = Q(S^2) = Q(S'^2)$

On, S' commute avec tout polynôme en S', donc avec $S = Q(S'^2)$

Donc S et S' sont codiagonalisables. Donc $\exists P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P_0S'P_0^{-1}$ et $P_0SP_0^{-1}$ soient diagonales. Mais alors $S^2 = S'^2$. Donc $P_0S^2P_0^{-1} = P_0S'^2P_0^{-1}$ et $S = S'$ car leurs valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $S = S'$, $O = O'$ et on a l'injectivité.

3) Continuité de μ^{-1} :

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $M_p \xrightarrow[p \to \infty]{} M$, $M_p \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M = OS$ sa décomposition polaire.

$\forall p \in \mathbb{N}$, il existe $O_p \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_p \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M_p = O_p S_p$.

Or, $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Donc $\exists \varphi$ extractrice telle que $O_{\varphi(p)}$ converge vers $\bar{O} \in O_n(\mathbb{R})$

$S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1} M_{\varphi(p)}$ converge alors également vers $\bar{O}^{-1} M = \bar{S}$.

$\bar{S} = \bar{O}^{-1} M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{+}(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R})$

Donc $M = \bar{O}\bar{S}$ avec $\bar{O} \in O_n(\mathbb{R})$, $\bar{S} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par l'unicité de la décomposition polaire, $\bar{O} = O$ et $\bar{S} = S$.

Donc $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une valeur d'adhérence et est dans $O_n(\mathbb{R})$, compact.

Donc $\lim_{p\to\infty} O_p = O$ et donc $S_p \xrightarrow[p\to\infty]{} S$ et μ^{-1} est continue.

4a) Application a) Tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$

Preuve : Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ compact, contenant $O_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in G$ et $M = OS$ sa décomposition polaire. $O \in G$. Donc $S \in G$.

Donc, comme G est un groupe, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $G^k \in S$. Si λ est une valeur propre de S, λ^k est une valeur propre de S^k.

G étant compact, on a que $\{|\lambda|^k ; k \in \mathbb{Z}\}$ est borné. Donc $|\lambda| = 1$.

Or, $S \in S_n^{++}$. Donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda = 1$. Donc $sp(S) = \{1\}$ et S est DZ.

Donc $S = I_n$, $M = O$. D'où $G = O_n(\mathbb{R})$

4) b) Application b) $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

Preuve : Soit $A = OS$. Comme $\|S(x)\|_2 = \|OS(x)\|_2$, pour tout x, on a que $|||A|||_2 = |||S|||_2$. $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc S est DZ dans une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ telle que les valeurs propres correspondantes soient $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$

Si $\|x\|_2 = 1$, où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, alors

$\|S(x)\|_2 = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i v_i\|_2 \leq \lambda_1 \|x\|_2$. La borne étant atteinte pour v_1.

On a donc $\rho(S) = |||S|||_2$ et on conclut par $\rho(S) = \lambda_1 = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$