

Nombres de Bell et loi des petits nombres

Nombres de Bell

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle n -ième nombre de Bell et on note B_n , le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On convient que $B_0 = 1$. Alors :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

(ii) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$B_n = \mathbb{E}(X^n).$$

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la formule de Doblinski :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}.$$

Démonstration :

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_{n+1}$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathcal{P}_{n+1,k}$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dont l'élément qui contient $n+1$ contient aussi k autres éléments, ainsi la famille $\{\mathcal{P}_{n+1,k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est une partition de $\mathcal{P}_{n+1}$. Calculons le cardinal des $\mathcal{P}_{n+1,k}$.

Soit alors $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, tout élément de $\mathcal{P}_{n+1,k}$ est la réunion d'un singleton $\{A\}$ où A est une partie à $k+1$ éléments et d'une partition d'un ensemble à $n-k$ éléments. Dès lors

$$\text{card}(\mathcal{P}_{n+1,k}) = \binom{n}{k} B_{n-k},$$

et par suite

$$B_{n+1} = \text{card}(\mathcal{P}_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

(ii) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Soit φ_X la fonction caractéristique de X , on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi_X(e^{it}) &= \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k \geq 0} e^{itk} \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} e^{itk} \frac{e^{-1}}{k!} = \exp(e^{it} - 1). \end{aligned}$$

La fonction φ_X est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0, par suite X admet des moments de tout ordre.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathbb{E}(X^n)$, de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{E}(X^{n+1}) = \sum_{k \geq 0} k^{n+1} \frac{e^{-1}}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 1} k^n \frac{e^{-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} (k+1)^n \frac{e^{-1}}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} k^j \frac{e^{-1}}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{k \geq 0} k^j \frac{e^{-1}}{k!} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} u_j. \end{aligned}$$

Comme $u_0 = 1 = B_0$ alors par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \mathbb{E}(X^n)$$

(iii) Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} B_n &= \mathbb{E}(X^n) = \sum_{k \geq 0} k^n \frac{e^{-1}}{k!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}. \end{aligned}$$

□

Loi des petits nombres

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur Ω de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration :

Comme $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$, on a $p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq k$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n-k} \end{aligned}$$

mais

$$\frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k = \frac{1}{n^k} n(n-1)\dots(n-k+1)(\lambda + o(1))^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda^k$$

et d'autre part

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}.$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

d'où $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

□

Références

- Julien et Laurent Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*.
- Jean-Yves Oувrard, *Probabilités : Tome 1*.