

Réduction de Jordan

Soient K un corps commutatif et E un K -espace vectoriel de dimension finie n .

Rappels

Définition 1

On dit qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ et un vecteur $x \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.

Définition 2

L'orthogonal dans E^* d'une partie X de E est l'ensemble :

$$X^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in X, \varphi(x) = 0\}.$$

L'orthogonal dans E d'une partie Y de E^* est l'ensemble :

$$Y^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0\}$$

Remarque

Il est clair que $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* et que Y° est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1

Soient F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de E^* , alors

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
2. $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$.

Définition 3

La transposée de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'application ${}^t u$ de E^* dans E^* définie pour tout $\varphi \in E^*$ par :

$${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u.$$

Remarque

On vérifie que ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$.

Proposition 2

Soit F un sous-espace vectoriel de E , alors F est stable par u si, et seulement si, F^* est stable par ${}^t u$.

Définition 4

Soit $\lambda \in K$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ on appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ l'espace :

$$N_k = \text{Ker}(u - \lambda I_E)^\alpha$$

où α est la multiplicité de λ dans χ_u .

Proposition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $\pi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\beta_k}$, alors

1. $E = \bigoplus_{k=1}^p N_k$;
2. $N_k = \text{Ker}(u - \lambda_k I_E)^{\beta_k}$;
3. N_k est stable par u et λ_k est la seule valeur propre de la restriction de u à N_k ;
4. $\dim(N_k) = \alpha_k$
5. la restriction de $u - \lambda_k I_E$ à N_k est nilpotente d'indice β_k .

Le développement**Théorème 1**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geq 1$ alors il existe une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ de E telle que chaque sous-espace vectoriel $E_i = \text{Vect } \mathcal{B}_i$ soit stable par u et que la matrice de la restriction de u à E_i soit :

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{q_i}(K)$$

avec $q_i = \dim(E_i)$.

Théorème 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $\chi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $\pi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\beta_k}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_p \end{pmatrix}$$

avec pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{\alpha_k}(K).$$

où $\varepsilon_{k,i} \in \{0, 1\}$.

Lemme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geq 1$. Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$ la famille $\mathcal{B}_{u,x}$ est une famille libre de E et l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est u -stable.

Preuve :

Comme $u^{q-1} \neq 0$ il existe $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1} \in K$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

Montrons par récurrence sur j que les λ_j sont tous nuls.

$$0 = u^{q-1}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{q-1+k}(x) = \lambda_0 u^{q-1}(x)$$

Et puisque $u^{q-1}(x) \neq 0$ on a $\lambda_0 = 0$.

Supposons que $\lambda_0 = \dots = \lambda_j = 0$ alors $\sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$, et

$$0 = u^{q-j-2}\left(\sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^{q-j-2+k}(x) = \lambda_{j+1} u^{q-1}(x).$$

Et à nouveau on en déduit que $\lambda_{j+1} = 0$. Les λ_j sont donc tous nuls et la famille $\mathcal{B}_{u,x}$ est libre. La stabilité de F par u découle alors du fait que u est nilpotent. $\square$

Démonstration :

On va montrer le théorème par récurrence sur la dimension n de E , pour cela cherchons auparavant une décomposition de E en somme directe adaptée.

On peut remarquer que comme u est nilpotent d'indice q alors ${}^t u$ est aussi nilpotent d'indice q . On peut alors appliquer le lemme à ${}^t u$: il existe $\varphi \in E^*$ tel que ${}^t u^{q-1}(\varphi) \neq 0$, et on pose $H = \text{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, {}^t u^{q-1}(\varphi))$. De plus comme ${}^t u^{q-1}(\varphi) \neq 0$ il existe $x \in E$ tel que $\phi \circ u^{q-1}(x) \neq (0)$ et donc $u^{q-1}(x) \neq (0)$. On pose $F = \text{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$ qui, d'après le lemme, est de dimension q . Soit maintenant $G = H^\circ$, on a

$$\dim(E) = \dim(G) + \dim(H) = \dim(G) + \dim(F).$$

Et comme H est ${}^t u$ -stable, G est u -stable.

Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F \cap G$. Comme G est u -stable $u^{q-1}(y) \in G$ et :

$$0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k \varphi(u^{q-1+k}(x)) = \lambda_0 u^{q-1}(x).$$

Donc $\lambda_0 = 0$, puis par une récurrence similaire à celle du lemme on montre que tous les λ_k sont nuls et donc que $F \cap G = \{0\}$. Et ainsi $E = F \oplus G$

Montrons maintenant le résultat principal par récurrence sur n . Si $n = 1$ c'est évident, supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$, montrons-le au rang n . On complète la base $\mathcal{B}_{u,x}$ de F par une base de G en une base $\mathcal{B}$ de E . On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_q(K)$$

et A_{n-q} est la matrice de $u|_G$ dans la base considérée. Si $q = n$ c'est fini, sinon on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_G$ qui est bien un endomorphisme nilpotent d'indice $\leq q$. $\square$

Démonstration :

D'après le lemme des noyaux appliqué à χ_u on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^p N_k.$$

Chaque sous-espace N_k est de dimension α_k et stable par u . De plus $v_k = (u - \lambda_k Id)|_{N_k}$ est nilpotente d'indice β_k . Il existe donc une base $\mathcal{B}_k$ de N_k telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(v_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & 0 \end{pmatrix} \in M_{\alpha_k}(K)$$

et donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u|_{N_k}) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On obtient alors le résultat en concaténant les bases $\mathcal{B}_k$. □

Référence

- Jean-Etienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*