leçons :
218 : Application des formules de Taylor
223 : Suites numériques.
226 : $u_{n+1} = f(u_n)$
230 : séries de nb réels ou complexes
232 : approximation solutions $f(X)=0$
224 : developpements asymptotiques
144 : Racines d'un polynôme

Méthode de Newton pour les polynômes

4

Référence : Chambert - Loir & Fermigier "Analyse 2 exercices"

Thm : Soient $a_1 < \dots < a_n$ des réels, $m_1, \dots, m_n$ des entiers non nuls et $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{m_i} \in \mathbb{R}[X]$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > a_n$. On définit la suite (x_n) par récurrence : $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$. Alors (x_n) est bien définie, est strictement décroissante et converge vers a_n.

Plus précisément, si $m_n = 1$, alors la convergence est quadratique.

si $m_n \geq 2$, alors $\exists c > 0$ $|x_n - a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} c\left(1 - \frac{1}{m_n}\right)^n$

preuve :

① MQ (x_n) est bien définie, est strictement décroissante et converge vers a_n.

On pose $f : \begin{cases} [a_n, +\infty[\to [a_n, +\infty[\\ x \mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \end{cases}$

MQ f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- Les racines de P sont toutes dans $[a_1, a_n]$ donc par Gauss-Lucas, les racines de P' aussi. Donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ $P'(X) = (X-a_n)^{m_n-1} Q(X)$ avec Q qui ne s'annule pas sur $[a_n, +\infty[$
  $\frac{P(X)}{P'(X)} = \frac{(X-a_n)\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i)^{m_i}}{Q(X)}$ donc $f(x)$ existe pour tout $x \geq a_n$ et f $\mathcal{C}^\infty$.
- $f(a_n) = a_n - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)} = a_n$
- $\forall x > a_n$ $f'(x) = 1 - \frac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P'(x)^2} = \frac{P(x)\,P''(x)}{P'(x)^2} > 0$ (car les racines de P'' sont dans $[a_1, a_n]$ et que tous les coef dominants sont > 0)
  donc f croissante (strictement) et f est bien à valeurs dans $[a_n, +\infty[$.
- On en déduit que (x_n) est bien définie et que $\forall n \geq 0$ $x_n \geq a_n$.
- $\forall x > a_n$ $f(x) - x = -\frac{P(x)}{P'(x)} < 0$ donc (x_n) est strictement décroissante.
- a_n est l'unique point fixe de f sur $[a_n, +\infty[$ donc (x_n) converge vers a_n.

② Calcul de $f'(a_n)$:

Décomposition en éléments simples : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{X-a_i}$ donc $\dfrac{P''P - P'^2}{P^2} = -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{(X-a_i)^2}$

D'où $\forall x > a_n$ $f'(x) = 1 - \dfrac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P'(x)^2} = 1 - \dfrac{P^2(x)}{P'(x)^2} \dfrac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P^2(x)}$

$= 1 - \left(\dfrac{P(x)}{P'(x)}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{(x-a_i)^2} = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{x-a_i}\right)^{-2} \left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{(x-a_i)^2}\right)$

$\xrightarrow[x \to a_n]{} 1 - \dfrac{1}{m_n}$

③ Cas $m_n = 1$: $f'(a_n) = 0$

Taylor Young à l'ordre 2 : $f(x_n) = f(a_n) + \dfrac{f''(a_n)}{2}(x_n - a_n)^2 + o((x_n-a_n)^2)$

D'où $\dfrac{|x_{n+1} - a_n|}{|x_n - a_n|^2} \to \left|\dfrac{f''(a_n)}{2}\right|$ et la convergence est quadratique.

④ Cas $m_n \geqslant 2$: $f'(a_n) = 1 - \dfrac{1}{m_n} \in [\tfrac{1}{2}, 1[$

Egalité des accroissements finis : $\forall n$ $\exists y_n \in]a_n, x_n[$ $f(x_n) - f(a_n) = f'(y_n)(x_n - a_n)$

$\forall n \geqslant 0$ $\ln(x_{n+1} - a_n) - \ln(x_n - a_n) = \ln f'(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln f'(a_n) < 0$

Sommation des relations de comparaison : $\ln(x_n - a_n) \sim n \ln f'(a_n)$ (*)
(cas divergent)

Mq $\ln(x_n - a_n) - n \ln f'(a_n)$ converge.

Taylor-Young à l'ordre 2 : $x_{n+1} - a_n = f'(a_n)(x_n - a_n) + O((x_n - a_n)^2)$

On pose $\varepsilon_n = \dfrac{x_{n+1} - a_n}{f'(a_n)(x_n - a_n)} - 1 = O((x_n - a_n))$

Soit $c \in]f'(a_n), 1[$, alors $\ln(x_n - a_n) - n\ln c \sim \underbrace{n \ln f'(a_n)}_{<0} \underbrace{\left(1 - \dfrac{\ln c}{\ln f'(a_n)}\right)}_{>0}$ par (*)

donc $\ln \dfrac{x_n - a_n}{c^n} \to -\infty$ donc $x_n - a_n = o(c^n)$

On en déduit que $\varepsilon_n = O(c^n)$

donc $\ln\left(\dfrac{x_{n+1} - a_n}{f'(a_n)(x_n - a_n)}\right) = \ln(1 + \varepsilon_n) = O(c^n)$ est le terme général d'une série convergente.

Donc $\exists \lambda > 0$ $\ln(x_n - a_n) - n \ln f'(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$

exp est continue : $\dfrac{x_n - a_n}{f'(a_n)^n} \to e^{\lambda}$

ie $x_n - a_n \sim e^{\lambda}\left(1 - \dfrac{1}{m_n}\right)^n$