

29 Méthode de Newton

Ref : Rouvière p.152 + Dumas

THÉORÈME 29.1 Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, s'annulant en un unique point a tel que $c < a < d$, avec $f'(a) > 0$. On définit $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, par $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1) Il existe $\alpha > 0$, tel que $[a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ et la suite récurrente définie par :

$$x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha] \text{ et } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers a au moins à l'ordre 2.

2) Si $f''(a) \neq 0$, la convergence est exactement d'ordre 2.

3) Si $f'(a) = 0$, il y a seulement convergence linéaire a priori.

PREUVE.

Interprétation géométrique : on prend la tangente en x_n et on regarde son intersection avec l'axe des x . On itère ce procédé. L'équation $f(x) = 0$ est équivalent à $f(x) = x$.

1) φ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f''(x)f'(x)}{f'(x)^2}$. En particulier, $\varphi'(a) = 0$, donc le point fixe a est superattractif, mais ce n'est pas immédiat que la convergence est d'ordre 2 car φ est seulement $\mathcal{C}^1$.

Comme $|\varphi'(a)| < 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ .

Estimons la quantité $\|\varphi(x) - a\|$:

$$\varphi(x) - a = x - a + \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f''(x)}$$

Par un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour f , on obtient un $a \in]a, x[$ tel que :

$$\varphi(x) - a = \frac{f''(z)(x - a)^2}{2f'(x)}$$

En posant $C = \frac{\max |f''|}{2 \min |f'|}$, où les max et min sont pris sur l'intervalle stable $[a - \alpha, a + \alpha]$, on obtient :

$$|\varphi(x) - a| \leq C|x - a|^2$$

Ainsi, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$ et par récurrence $|x_n - a| \leq \frac{1}{C}(C|x_0 - a|)^{2^n}$. D'où la convergence au moins à l'ordre 2.

2) Supposons $f' > 0$ (quitte à prendre $-f$) et $f'' > 0$ sur $[c, d]$ (condition de convexité globale) alors l'intervalle $[a, d]$ est stable et la convergence est d'ordre exactement 2 pour $x_0 \in [a - \alpha, d]$. En effet, si $x_0 \in [a, d]$, comme $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$ sur $[a, d]$, x_n est décroissante et ne peut que converger vers a , unique point fixe.

On peut préciser l'ordre de convergence, on va montrer que c'est exactement 2.

Si $a - \alpha \leq x_0 \leq a$, $x_1 \leq a$ puisque $\varphi(x) \leq x$ sur $[a - \alpha, a]$. Après une itération, on retombe à droite de a , regardons maintenant le cas $x_0 > a$.

Par Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour f :

$$x_{n+1} - a = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2$$

avec $a < z_n < x_n$, donc $\frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}$ tend vers $\frac{f''(a)}{2f'(a)}$. D'où l'équivalent :

$$x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$$

ce qui montre que la convergence n'est pas d'ordre > 2 .

3) Si $f'(a) = 0$, on a seulement convergence linéaire. Tout d'abord, φ n'est pas bien définie en a mais le développement limité montre que φ reste $\mathcal{C}^1$.

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + o((x-a)^2)}{((x-a)f''(a) + o(x-a))^2} f''(a) = \frac{1}{2} + o(1)$$

Par le théorème de limite de la dérivée, φ se prolonge en a et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c, d]$. De plus, $\varphi'(a) \leq \frac{1}{2}$, donc il y a convergence exactement d'ordre 1 sur un voisinage de a car c'est un point fixe attractif. (S'il y avait convergence d'ordre 2, on aurait $\varphi'(a) = 0$ comme le montre l'inégalité : $|\varphi(x) - a| \leq C|x - a|^2$.) $\square$

Leçons concernées : $f(x)=0$, développement asymptotique, suites récurrentes, formules de Taylor, (théorèmes de point fixe), fonctions monotones et convexes.