223 : Suites numériques
226 $u_{n+1} = f(u_n)$

Étude d'une suite définie par récurrence (FGN)

Énoncé : $\lambda \in]0;1]$. Étudier la suite définie par $x_0 \in]0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$
$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$

1) $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent

$f :]0;1[\longrightarrow]0;1[$ est bien définie car $f(]0;1[) \subset]0;1[$.
$x \longmapsto 1 - \lambda x^2$

En effet, f décroît strict et $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 - \lambda \geq 0$
Donc $f \circ f$ croît et les deux suites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
De plus elles sont à valeurs dans $]0;1[$. Elles convergent donc.

2) $f \circ f(x)$ et $g(x) = f\circ f(x) - x$

$f\circ f(x) = 1 - \lambda(1-\lambda x^2)^2 = -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^2 x^2 + (1-\lambda)$. $\quad g(x) = f\circ f(x) - x$
Les limites de $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont à chercher parmi les points fixes de $f\circ f$, i.e parmi les zéros de g.
Or, un point fixe de f est un point fixe de $f\circ f$. Donc un zéro de $x \overset{h}{\mapsto} f(x) - x$ est un zéro de g et on peut factoriser g par h.
$g(x) = (f(x) - x)\,k(x) = (-\lambda x^2 - x + 1)(\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda)$

3) Les zéros de g.

Si $g(l) = 0$, alors, • soit l est l'unique point fixe de f dans $[0;1]$

$$l = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$$

• soit $k(l) = 0$.

Le discriminant de k vaut $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 4(\lambda - 1)\lambda^2 = \lambda^2(4\lambda - 3)$

- Cas 1 $\lambda < \frac{3}{4}$. Alors $\Delta(\lambda) < 0$. Donc un zéro de g ne peut être un zéro de k. Donc $f \circ f$ admet un unique point fixe, celui de f.
Donc $\lim_{n \to \infty} x_{2n} = \lim_{n \to \infty} x_{2n+1} = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda}$
- Cas 2 $\lambda = \frac{3}{4}$. Alors $\Delta(\lambda) = 0$, donc k admet un unique zéro, i.e. $l' = \frac{1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda} = l$ et le zéro de k est aussi l'unique point fixe de f. Donc $\lim_{n \to \infty} x_{2n} = \lim_{n \to \infty} x_{2n+1} = l$
- Cas 3 $\lambda > \frac{3}{4}$. Alors $\Delta(\lambda) > 0$ et k admet deux zéros
$l_1 = \frac{1+\sqrt{4\lambda-3}}{2\lambda}$, $l_2 = \frac{1-\sqrt{4\lambda-3}}{2\lambda}$

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l sauf si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire

$f'(l) = -2\lambda l = 1 - \sqrt{1+4\lambda} < -1$. Donc $\exists V$ voisinage de l tel que $\forall x \in V$, $f'(x) < k$ si $k \in]f'(l); -1[$

Si $x_n \to l$ alors à partir du rang n_0, $x_n \in V$ et $|f(x_n) - f(l)| \geq |k||x_n - l|$

D'où $|x_{n+1} - l| \geq k|x_n - l|$, et etc... $|x_n - l| \geq |k|^{n-n_0} |x_{n_0} - l| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ si $x_{n_0} \neq l$

Donc $(x_n)_n$ est stationnaire à partir du rang n_0.

Mais $x_{n+1} = l \Leftrightarrow 1 - \lambda x_n^2 = 1 - \lambda l^2 = l \Leftrightarrow x_n = l$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $l \Leftrightarrow x_0 = l$.

b) $x_{2n} \to l_1$ et $x_{2n+1} \to l_2$ ou inversement

$(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent converger vers la même limite, sinon celle-ci est un point fixe de f, i.e. l, ce qui est impossible.

De la même manière, $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers l et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ non plus.

L'une converge vers l_1 et l'autre vers l_2 et $l_1 < l < l_2$.

Si $x_0 < l$, alors $x_1 > l$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{2n} < l$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{2n+1} > l$.

Donc $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l_2$

Si $x_0 > l$, c'est l'inverse.